ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ГЛАВЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Е. А. Бакланов

Новосибирск, 2024

1. Основные понятия теории вероятностей
2. Вероятностные неравенства
3. Законы больших чисел и ряды случайных величин
4. Центральная предельная теорема
5. Закон повторного логарифма
   - Законы нуля и единицы
   - Предварительные оценки

Предварительные оценки

Всюду в этом параграфе $\{X_n\}_{n\geqslant 1}$ — последовательность независимых и одинаково распределённых случайных величин с нулевым средним. Как показано в теореме 3.13, при этих предположениях $S_n = o(n)$ п. н. и, вообще говоря, при этих условиях нельзя утверждать что-либо большее. Но если наложить дополнительные ограничения на распределение величин X_n, то, оказывается, можно получить очень точные результаты при весьма общих условиях.

Определение

Будем говорить, что последовательность случайных величин $X_n = O(b_n)$ п. н., где $\{b_n\}_{n\geqslant 1}$ — последовательность положительных чисел, если для некоторой постоянной $C > 0$ события $\{|X_n| \geqslant Cb_n\}$ с вероятностью 1 происходят лишь конечное число раз.

Предварительные оценки

Мы начнём изучение закона повторного логарифма с рассмотрения простейшего случая — симметричной схемы Бернулли: $\mathsf{P}(X_n = -1) = \mathsf{P}(X_n = 1) = 1/2$.
Это вполне естественно; тем более, что это соответствует историческому ходу исследований. Ранние результаты таковы.

В 1913 г. Ф. Хаусдорф показал, что $S_n = O(n^{1/2+\varepsilon})$ п. н. для всех $\varepsilon > 0$.

В 1914 г. Г. Харди и Дж. Литтлвуд доказали более сильное утверждение, согласно которому с вероятностью 1 отношение $|S_n|/\sqrt{n \ln n}$ остаётся ограниченным:

$$S_n = O(\sqrt{n \ln n}) \text{ п. н.}$$

Предварительные оценки

В 1922 г. Г. Штейнгауз уточнил результат Харди и Литтлвуда, показав, что с вероятностью 1

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{S_n}{\sqrt{2n\ln n}} \leqslant 1.$$

В 1923 г. А. Я. Хинчин получил для роста сумм S_n оценку

$$S_n = O(\sqrt{n\ln\ln n}) \text{ п. н.},$$

а в 1924 г. им же был получен окончательный результат — *закон повторного логарифма*:

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{|S_n|}{\sqrt{2n\ln\ln n}} = 1 \quad \text{п. н.}$$

В 1929 г. А. Н. Колмогоров обобщил результат Хинчина на широкий класс независимых случайных величин.

Мы изложим эти результаты в их историческом порядке, однако не будем ограничиваться лишь случаем схемы Бернулли.

Лемма 5.1 (оценка Хаусдорфа)

Пусть $\mathsf{E}|X_1|^m < \infty$ *для всех* $m \geqslant 1$. *Тогда для любого* $\varepsilon > 0$

$$S_n = O(n^{1/2+\varepsilon}) \text{ п. н.}$$

Предварительные оценки

Доказательство

Пусть $\delta > 0$. Покажем, что $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \mathsf{P}(|S_n| \geqslant \delta n^{1/2+\varepsilon}) < \infty$. Тогда в силу леммы Бореля — Кантелли с вероятностью 1 события $\{|S_n| \geqslant \delta n^{1/2+\varepsilon}\}$ происходят лишь конечное число раз.

Пусть k — целое положительное число. Тогда по неравенству Маркова (1.2)

$$\mathsf{P}(|S_n| \geqslant \delta n^{1/2+\varepsilon}) \leqslant \frac{\mathsf{E} S_n^{2k}}{\delta^{2k} n^{k+2k\varepsilon}}.$$

Далее, из следствия 2.7 получаем оценку

$$\mathsf{E}|S_n|^{2k} \leqslant C(k) n^{k-1} \sum_{j=1}^{n} \mathsf{E}|X_j|^{2k} = C(k) n^k \mathsf{E}|X_1|^{2k}.$$

Доказательство

Таким образом,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathsf{P}(|S_n| \geqslant \delta n^{1/2+\varepsilon}) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C(k) n^k \mathsf{E}|X_1|^{2k}}{\delta^{2k} n^k n^{2k\varepsilon}} = \tilde{C}(k) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2k\varepsilon}} < \infty,$$

если $2k\varepsilon > 1$. Поскольку для произвольного $\varepsilon > 0$ можно выбрать k так, что $2k\varepsilon > 1$, то отсюда следует требуемая оценка. □

Улучшения оценки Хаусдорфа требуют более точных неравенств для вероятностей $\mathsf{P}(|S_n| \geqslant x)$. В приведённом выше доказательстве мы использовали $\mathsf{E}|S_n|^k$ при растущем k. Этот процесс естественно приводит к замене степенной функции на экспоненту. В §1 главы 2 мы получили, в частности, неравенство Хёффдинга для ограниченных случайных величин. Используя это неравенство, получаем следующее утверждение.

Лемма 5.2 (оценка Харди — Литтлвуда)

Пусть $|X_n| \leqslant C$ *п. н. Тогда* $S_n = O(\sqrt{n \ln n})$ *п. н.*

Предварительные оценки

Доказательство

Достаточно показать, что $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \mathsf{P}(|S_n| \geqslant \delta\sqrt{n \ln n}) < \infty$ для некоторого $\delta > 0$.

Так как $\mathsf{E}X_n = 0$, то из неравенства (2.1) следует, что для всех $x > 0$

$$\mathsf{P}(|S_n| \geqslant x) \leqslant 2e^{-x^2/2nC^2}.$$

Положим $x = \delta\sqrt{n \ln n}$. Тогда

$$\mathsf{P}(|S_n| \geqslant \delta\sqrt{n \ln n}) \leqslant 2e^{-\delta^2 n \ln n/2nC^2} = 2n^{-\delta^2/2C^2}.$$

Таким образом, если $\delta^2 > 2C^2$, то

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathsf{P}(|S_n| \geqslant \delta\sqrt{n \ln n}) \leqslant 2\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\delta^2/2C^2} < \infty.$$

Попытка продвинуться дальше за счёт получения ещё лучшей верхней оценки, чем (2.1), обречена на провал, так как эта оценка близка к окончательной. Следующий шаг удаётся сделать, лишь осознав, что события вида $\{S_n \geqslant \delta\sqrt{n \ln n}\}$ сильно зависимы, так что сумма их вероятностей, как бы хорошо они ни были оценены, не может служить руководством для изучения вероятности объединения или верхнего предела. Чтобы обойти это препятствие, мы соберём эти события в большие группы, так что для применения леммы Бореля — Кантелли достаточно будет установить сходимость некоторого подряда из вероятностей.

Предварительные оценки

Итак, перейдём к рассмотрению общего случая. Поскольку доказательство закона повторного логарифма довольно сложно, рассмотрим сначала частный случай, когда случайные величины являются нормально распределёнными.

Теорема 5.2

Пусть $X_1, X_2, \ldots$ — независимые случайные величины, имеющие стандартное нормальное распределение. Тогда

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{|S_n|}{\sqrt{2n\ln\ln n}} = 1 \quad \text{п. н.} \tag{5.2}$$

Доказательство

Достаточно доказать, что

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{S_n}{\sqrt{2n\ln\ln n}} = 1 \quad \text{п. н.} \tag{5.3}$$

Применяя (5.3) к случайным величинам $\{-X_n\}_{n\geqslant 1}$, получаем:

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{S_n}{\sqrt{2n\ln\ln n}} = -1 \quad \text{п. н.} \tag{5.4}$$

Тогда из (5.3) и (5.4) следует (5.2).

Доказательство

Положим $a(n) = (2n \ln\ln n)^{1/2}$, $n \geqslant 3$. Покажем, что

$$\mathsf{P}\left(\limsup_{n\to\infty} \frac{S_n}{a(n)} \leqslant 1\right) = 1. \tag{5.5}$$

Утверждение (5.5) равносильно тому, что для любого $\varepsilon > 0$ и всех достаточно больших n

$$S_n \leqslant (1+\varepsilon)a(n) \text{ п. н.}$$

Доказательство

Пусть $\varepsilon > 0$. Определим последовательность $n_k = [(1+\varepsilon)^k]$ (грубо говоря, геометрическую прогрессию). Обозначим также

$$A_k = \{S_n \geqslant (1+\varepsilon)a(n) \text{ для некоторого } n \in (n_k, n_{k+1}]\},$$

и пусть

$$\begin{aligned} A &= \{\text{события } A_k \text{ происходят бесконечно часто }\} = \\ &= \{S_n \geqslant (1+\varepsilon)a(n) \text{ для бесконечно многих } n\}. \end{aligned}$$

Для доказательства (5.5) достаточно показать, что $\mathsf{P}(A) = 0$. Докажем, что $\sum\limits_{k\geqslant 1} \mathsf{P}(A_k) < \infty$. Тогда по лемме Бореля — Кантелли будем иметь $\mathsf{P}(A) = 0$.

Доказательство

Так как независимые случайные величины $\{X_n\}_{n\geqslant 1}$ имеют стандартное нормальное распределение, то $S_n/\sqrt{n}$ также имеет стандартное нормальное распределение. Из экспоненциального неравенства Чебышева (1.4) нетрудно получить оценку

$$\mathsf{P}(S_n/\sqrt{n} \geqslant x) \leqslant e^{-x^2/2}.$$

Доказательство

Используя неравенство Леви (2.25), получаем:

$$
\begin{aligned}
\mathsf{P}(A_k) &\leqslant \mathsf{P}(S_n \geqslant (1+\varepsilon)a(n_k) \text{ для некоторого } n \in (n_k, n_{k+1})] = \\
&= \mathsf{P}(\max_{n_k < n \leqslant n_{k+1}} S_n \geqslant (1+\varepsilon)a(n_k)) \leqslant \\
&\leqslant \mathsf{P}\Big(\max_{1 \leqslant n \leqslant n_{k+1}} S_n \geqslant (1+\varepsilon)a(n_k)\Big) \leqslant \\
&\leqslant 2\mathsf{P}(S_{n_{k+1}} \geqslant (1+\varepsilon)a(n_k)) \leqslant 2\exp\{-(1+\varepsilon)^2 a^2(n_k)/2n_{k+1}\} \leqslant \\
&\leqslant C_1 e^{-(1+\varepsilon)\ln\ln n_k} \leqslant C_2 e^{-(1+\varepsilon)\ln k} = C_2 k^{-(1+\varepsilon)}
\end{aligned}
$$

для всех достаточно больших k, где C_1 и C_2 — некоторые положительные постоянные. Но $\sum\limits_{k \geqslant 1} k^{-(1+\varepsilon)} < \infty$, поэтому $\sum\limits_{k \geqslant 1} \mathsf{P}(A_k) < \infty$. Итак, соотношение (5.5) доказано.

Доказательство

Теперь покажем, что

$$\mathsf{P}\left(\limsup_{n\to\infty}\frac{S_n}{a(n)} \geqslant 1\right) = 1, \tag{5.6}$$

что равносильно тому, что для любого $\varepsilon > 0$ и для бесконечно многих n

$$S_n \geqslant (1-\varepsilon)a(n) \text{ п. н.}$$

Доказательство

Выберем $N > 1$ настолько большим и γ, $0 < \gamma < 1$, так, чтобы

$$\gamma\sqrt{1 - 1/N} - 2/\sqrt{N} > 1 - \varepsilon.$$

Положим $n_k = N^k$, $\Delta n_k = n_k - n_{k-1}$ и рассмотрим независимые события

$$A_k = \{S_{n_k} - S_{n_{k-1}} \geqslant \gamma a(\Delta n_k)\}.$$

Доказательство

Нам понадобится следующая оценка. Пусть случайная величина X имеет стандартное нормальное распределение. Тогда для всех $x > 0$

$$\mathrm{P}(X \geqslant x) = \int\limits_x^{+\infty} \frac{e^{-t^2/2}}{\sqrt{2\pi}}\,dt > \int\limits_x^{+\infty} \frac{e^{-t^2/2}}{\sqrt{2\pi}}\left(1 - \frac{3}{t^4}\right)dt = \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^3}\right).$$

В частности, если $x > \sqrt{2}$, то

$$\mathrm{P}(X \geqslant x) > \frac{e^{-x^2/2}}{2x\sqrt{2\pi}}.$$

Предварительные оценки

Доказательство

Используя эту оценку, получаем:

$$\begin{aligned}\mathsf{P}(A_k) &= \mathsf{P}\left(\frac{S_{n_k} - S_{n_{k-1}}}{\sqrt{\Delta n_k}} \geqslant \gamma \frac{a(\Delta n_k)}{\sqrt{\Delta n_k}}\right) \geqslant C_1 \frac{e^{-\gamma^2 \ln\ln \Delta n_k}}{(\ln\ln \Delta n_k)^{1/2}} \geqslant \\ &\geqslant C_2 \frac{e^{-\gamma^2 \ln k}}{\sqrt{\ln k}} = \frac{C_2}{k^{\gamma^2}\sqrt{\ln k}},\end{aligned}$$

так что $\sum\limits_{k\geqslant 1} \mathsf{P}(A_k) = \infty$. Следовательно, в силу леммы Бореля — Кантелли, с вероятностью 1 для бесконечно многих k

$$S_{n_k} - S_{n_{k-1}} \geqslant \gamma a(\Delta n_k).$$

Доказательство

Применим доказанное соотношение (5.5) к последовательности $\{-X_n\}_{n\geqslant 1}$. Тогда получим, что для всех n, за исключением, быть может, конечного числа, $-S_n \leqslant 2a(n)$ п. н. Тогда для всех достаточно больших k

$$S_{n_{k-1}} \geqslant -2a(n_{k-1}) \text{ п. н.}$$

Таким образом, с вероятностью 1 для бесконечно многих k

$$\begin{aligned} S_{n_k} &\geqslant S_{n_{k-1}} + \gamma a(\Delta n_k) \geqslant -2a(n_{k-1}) + \gamma a(\Delta n_k) \geqslant \\ &\geqslant (-2/\sqrt{N} + \gamma\sqrt{1-1/N})a(n_k) \geqslant (1-\varepsilon)a(n_k), \end{aligned}$$

что и доказывает соотношение (5.6). □